ECOLE SPECIALE DES TRAVAUX PUBLICS, DU BATIMENT ET DE L'INDUSTRIE

CONCOURS COMMUN D'ADMISSION AUX ECOLES SUPERIEURES

DES TRAVAUX PUBLICS
DU BATIMENT
DE MECANIQUE-ELECTRICITE
DE TOPOGRAPHIE

SESSION 1986

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

NOTA : *Les deux problèmes sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque. Respecter strictement la numérotation des parties et des questions ainsi que les notations.*

»»»»»»»»»»»o«««««««««««

PROBLEME N° 1

I — On considère l'intégrale double

$$I_n = \iint_{\Delta} \cos n(x+y)\, dxdy \quad , \quad n \in \mathbb{N} ;$$

Δ est le domaine défini par :

$$\Delta = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} ; \; -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2} \right\}$$

1 — Calculer I_n .

2 — En utilisant le changement de variables

$$s = x - y \qquad t = x + y$$

montrer que l'on a

$$I_n = \int_{-\pi}^{+\pi} g(t) \cos nt \, dt \quad ,$$

g étant une fonction à préciser.

II — Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

G est périodique et de période 2π et , sur $[-\pi , +\pi]$, par $G(t) = g(t)$.

1 — Donner une représentation graphique de G.

Calculer les coefficients de la série de Fourier de G .

Cette série converge-t-elle vers G(t) pour tout t réel ?

(Justifier la réponse avec précision).

Tournez la page S. V. P.

2– La série de Fourier représentant G est-elle uniformément convergente sur $\mathbb{R}$?

Calculer les sommes : $S_1 = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$ et $S_2 = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2}$.

3 – En utilisant la formule de Parseval pour la fonction G , calculer les deux sommes :

$$X = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} \quad \text{et} \quad S = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^4} .$$

III – Soit $S_n = I_o + 2 \sum_{p=1}^{n} I_p$, $n \geqslant 1$ et $S_0 = I_0$;

$$S_n = \int_{-\pi}^{+\pi} g(t) s_n(t)\, dt .$$

1 – Montrer que $s_n(t) = \dfrac{\sin (2n+1)\frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}}$.

2 – Montrer que $\lim_{n \to +\infty} S_n$ existe et exprimer cette limite en fonction de g(0).

PROBLEME N° 2

1 – Montrer que la fonction f définie par :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[, \qquad f(x) = Y = \operatorname{tg} x - x$$

admet une fonction réciproque F telle que $x = F(y)$.

Montrer que, quand $y \to +\infty$, il existe deux constantes réelles a_1 et a_2 telles que

$$F(y) = \frac{\pi}{2} + \frac{a_1}{y} + \frac{a_2}{y^2} + o\left(\frac{1}{y^2}\right) ;$$

Calculer a_1 et a_2 .

2 – Le plan est rapporté au repère orthonormé direct Oxy ou à l'axe polaire Ox ; $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont les vecteurs unitaires de Ox et de Oy ; (Γ) désigne un arc de classe C^3 au moins .

Soit M un point quelconque de (Γ) en lequel la normale à (Γ) est distincte de OM , H la projection de O sur cette normale, N l'intersection de cette normale et de la perpendiculaire en O à OM , C le centre de courbure en M à (Γ) .

Faire la figure.

On cherche la famille ϕ des courbes (Γ) telles que :

$$\frac{1}{\overline{MC}} + \frac{1}{\overline{MH}} = \frac{2}{\overline{MN}} ,$$ la normale en M à (Γ) ne passant pas par O ,

pour tout point M de (Γ) ; les mesures algébriques sont comptées sur un vecteur unitaire $\vec{n}$ de la normale à (Γ) en M.

V désigne un angle de OM et de la tangente en M à Γ ; ρ et θ sont les coordonnées de M sur (Γ).

Exprimer $\overline{MH}$, $\overline{MN}$ en fonction de ρ et de sin V , puis $\overline{MC}$ en fonction de ρ , sin V , $d\theta$ et dV .

En déduire une équation différentielle du premier ordre vérifiée par θ et V puis les expressions de θ et de ρ en fonction de V et de deux constantes réelles.

Tournez la page S. V. P.

3 – Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et (Γ_0) la courbe de la famille ϕ tangente à Ox au point $M_0(a\,;\,0)$.

a – On pose $u = -V$, $-\frac{\pi}{2} < u < +\frac{\pi}{2}$.

Montrer qu'une représentation de la courbe (Γ_0) est :

$\theta = \text{tg}u - u$, $\rho = a\cos u$.

Par quelle transformation affine passe-t-on de (Γ_0) à une courbe (Γ) quelconque de la famille ϕ ?

b – Calculer en M_0 : $\frac{d\overrightarrow{OM}}{du}$, $\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{du^2}$, $\frac{d^3\overrightarrow{OM}}{du^3}$.

En déduire la nature , sur (Γ_0) , du point M_0.

c – Soit (Γ_0^+) l'arc de (Γ_0) correspondant à $u > 0$, ou $0 \leqslant u < \frac{\pi}{2}$. On choisit M_0 comme origine sur cet arc que l'on oriente dans le sens des u croissants.

Calculer l'arc s et le rayon de courbure en un point M quelconque de (Γ_0^+) .

En déduire que (Γ_0^+) a un point d'inflexion dont on calculera les coordonnées polaires.

d – Construire (Γ_0^+) . Comment en déduit-on (Γ_0) ?

4 – $\forall k \in \mathbb{N}$, soit M_k le point de (Γ_0^+) tel que $\theta = 2k\pi$. Soit σ_k la longueur de l'arc de (Γ_0^+) compris entre M_k et M_{k+1} ; soit ρ_k la longueur de la distance OM_k .

Calculer la limite de $\frac{\sigma_k}{2\pi\rho_k}$ quand $k \to +\infty$.

5 – On veut retrouver les courbes (Γ) de la famille ϕ en considérant une courbe (Γ) comme enveloppe de ses tangentes.

Soit $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p(\alpha) = 0$

l'équation d'une telle tangente , la fonction p étant deux fois dérivable , au moins.

Montrer que p vérifie l'équation différentielle du second ordre $p'' = \frac{2pp'^2}{p^2 - p'^2}$

où $p' = \frac{dp}{d\alpha}$, $p'' = \frac{d^2p}{d\alpha^2}$.

Intégrer cette équation différentielle et retrouver les courbes (Γ) avec la même représentation qu'au 2 – .

On rappelle que dans l'équation de la droite D_α

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p(\alpha) = 0 \ ,$$

$p(\alpha)$ est la mesure algébrique , sur le vecteur $(\cos\alpha\,,\,\sin\alpha)$, de la distance de O à D_α .

On fera une figure indiquant la droite D_α puis les droites D'_α et D''_α obtenues en dérivant D_α puis D'_α par rapport à α . On indiquera les significations de p , p' , p'' .

On admettra que la relation

(1) $\frac{1}{\overline{MC}} + \frac{1}{\overline{MH}} = \frac{2}{\overline{MN}}$ est équivalente à la relation

(2) $\frac{1}{\overline{HM}} + \frac{1}{\overline{HN}} = \frac{2}{\overline{HC}}$.

On utilisera la relation (2) pour trouver l'équation différentielle demandée.

»»»»»»»»»»»»o«««««««««««